C 4310

B.A./B.Sc. (Three Year) DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2017.

End Semester Examination

Fourth Semester

Part II – Mathematics

Paper IV – REAL ANALYSIS

Time : *3 Hours* | *Max. Marks : 70*

PART — A

Answer any FIVE of the following questions. **(5 × 4 = 20 Marks)**

1. Prove that $\lim\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+......+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0$.

   $\lim\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+......+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0$ అని నిరూపించండి.

2. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

   $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

3. If $f:S\to R,\ g:S\to R$ and $a\in S$. If f, g are continuous at 'a' then prove fg is continuous at 'a'.

   $f:S\to R,\ g:S\to R$ మరియు $a\in S$ అనుకోండి. 'a' వద్ద f, g లు అవిచ్ఛిన్నమయితే 'a' వద fg అవిచ్ఛిన్నము అని నిరూపించండి.

4. Find 'c' of Cauchy's mean value theorem for $f(x)=\frac{1}{x^2}$ and $g(x)=\frac{1}{x}$ on $[a, b]$; $a,b>0$.

   $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ ప్రమేయాలకు $[a, b]$; $a,b>0$ కోషి సిద్ధాంతంలోని 'c' ను కనుక్కోండి.

5. If $f:[a, b]\to R$ is a bounded function then prove $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$.

   $f:[a, b]\to R$ పరిబద్ధ ప్రమేయమ్మైతే $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$ అని నిరూపించండి.

Turn Over

6. Prove that $S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ is convergent.

$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ అభిసరిస్తుందని నిరూపించండి.

7. Show that $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$.

$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$ అని చూపండి.

8. Discuss the applicability of Lagrange's mean value theorem for $f(x) = x(x-1)(x-2)$ on $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ అంతరంలో $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ప్రమేయానికి లెగ్రాంజ్ మధ్యమ విలువ సిద్ధాంతం అనువర్తనీయతను చర్చించండి.

PART — B

Answer ALL questions. **(5 × 10 = 50 Marks)**

9. (a) Discuss the nature of $\{r^n\}$ for $-1 \geq r$ and $-1 < r < 1$ for $r \in R$.

$r \in R$ కి, $-1 \geq r$ మరియు $-1 < r < 1$ లకు $\{r^n\}$ యొక్క అభిసరణతా స్వభావాన్ని చర్చించండి.

Or

(b) Prove if $\{S_n\}$ is a Cauchy sequence then $\{S_n\}$ is convergent.

$\{S_n\}$ కోషి అనుక్రమం అయితే $\{S_n\}$ అభిసరించే అనుక్రమం అని నిరూపించండి.

10. (a) State and prove D'Alembert's ratio test.

డి ఆలంబర్ట్స్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Test for the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

11. (a) If f is continuous on $[a, b]$ and $f(a), f(b)$ have opposite signs then there exists $C \in (a, b)$ show that $f(C) = 0$.

f ప్రమేయం $[a, b]$ అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నమై $f(a), f(b)$ లకు వ్యతిరేక గుర్తులుంటే $f(C) = 0$ అయ్యేటట్లు $C \in (a, b)$ వ్యవస్థితం అని నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that $\sin\frac{1}{x}$ has finite discontinuity at $x = 0$.

$x = 0$ వద్ద $\sin\frac{1}{x}$ పరిమిత విచ్ఛిన్నము అవుతుందని నిరూపించండి.

12. (a) State and prove Rolle's theorem.

రోలె సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Using Lagrange's mean value theorem prove that $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$.

లెగ్రాంజి సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$ అని చూపండి.

13. (a) State and prove the fundamental theorem of integral calculus.

సమాకలన గణిత మూల సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి దానిని నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that $f(x) = x^2$ is integrable on $[0, a]$ and $\int_0^9 x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

$[0, a]$ మీద $f(x) = x^2$ సమాకలనీయమని మరియు $\int_0^9 x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ అని నిరూపించుము.

———————