C 3310

B.A./B.Sc. (Three Year) DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2017.

End Semester Examination

Third Semester

Part II — Mathematics

Paper III : ABSTRACT ALGEBRA

(Regular/Supplementary)

(Common for B.A./B.Sc. courses)

Time : *3 Hours* | *Max. Marks : 70*

PART — A

Answer any FIVE of the following questions. **(5 × 4 = 20 Marks)**

1. Prove that $(z, \oplus)$ is an abelian group of the operation defined by $a \oplus b = a + b + 1 \;\; \forall \;\; a, b, \in z$ where z is set of integers.

   z లో $\oplus$ పరిక్రియ $\forall \;\; a, b, \in z$ కు $a \oplus b = a + b + 1$ గా నిర్వచింపబడిన $(z, \oplus)$ ని ఒక ఏబిలియన్ సమూహము అని చూపండి.

2. Show that the fourth roots of unity form an abelian group $(G, \bullet)$ w.r.t. the multiplication $G = \{1, -1, i, -i\}$.

   G లో మూలకాలు సంకీర్ణ సంఖ్యలు వినిమయ ధర్మమును పాటించుము. $(G, \bullet)$ వినిమయ సమూహము $G = \{1, -1, i, -i\}$.

3. If H, K are the two subgroups in a group G then HK is a subgroup if and only if $(\Leftrightarrow)$ $HK = KH$.

   ఒక సమూహము G లో H,K లు ఉపసమూహాలయితే, HK కూడ G లో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $HK = KH$ అని చూపండి.

4. Prove that any two right cosets of a subgroup of a group are either disjoint or identical.

   ఒక ఉపసమూహము యొక్క ఏవైనా రెండు కుడి సమితులైనా వియుక్తాలు లేదా సమానాలు అని చూపుము.

Turn Over

5. If H and K are two normal subgroups then show that $H \cap K$ is normal subgroups.

H మరియు K అనునవి అభిలంబ ఉపసమూహములు అయిన $H \cap K$ కూడా అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

6. Prove that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

ఏబీలియన్ సమూహము సమరూపత ప్రతిబింబము ఏబీలియన్ సమూహము అని చూపండి.

7. Let G be a group and N be a normal subgroup of G. Let f be a mapping from G to G/N defined by $f(x) = Nx$ for $x \in G$ then show that f is homomorphism of G onto G/N and $\ker f = N$.

G ఒక సమూహము, N దానిలో అభిలంబ ఉపమూలకము అనుకొనుము. G నుండి G/N కు f ప్రమేయము $f(x) = Nx$, $x \in G$ అని నిర్వచింపబడినది. అపుడు G నుండి G/N కు f సంగ్రస్త సమరూపత అని నిరూపించండి మరియు కెర్నెల్ $\ker f = N$ అగును.

8. Prove that every homomorphic image of cyclic group is cyclic group.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపత ప్రతిబింబము చక్రీయము అని చూపండి.

PART — B

Answer ALL the following questions. **(5 × 10 = 50 Marks)**

9. (a) (i) In a group G, if $a^2 = e$, $\forall a \in G$, prove that G is an abelian group.

ఒక సమూహము G లో $a^2 = e$, $\forall a \in G$ అయితే సమూహము G ఏబీలియన్ అని చూపండి.

(ii) Prove that a finite semi-group $(G, \bullet)$ satisfies the cancellation laws is a group.

పరిమిత అర్థ సమూహము $(G, \bullet)$ లో కొట్టివేత న్యాయాలు నిజమైన G ఒక సమూహము అవుతుంది అని నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that set $G = \{a / a^n = 1\}$ and multiplication form a finite abelian group.

తరగతి సమితి $G = \{a / a^n = 1\}$ సాధారణ గుణన పరిక్రియ ద్వారా ఏబీలియన్ సమూహము అని చూపండి.

10. (a) Prove that a finite non empty subset H of a group G is a subgroup of G in H, $a, b \in H \Rightarrow a.b \in H$. Is the result true? When H is finite.

సమూహము G యొక్క పరిమితి శూన్యేతర సంకీర్ణము H, G నకు ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow a.b \in H$ అని చూపండి. H పరిమిత అయిన ఇది నిజమా?

Or

(b) State and prove Lagranges theorem on subgroups.

ఉపసమూహముల మీద లెగ్రాంజి సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

11. (a) Prove that a subgroup N of a group G is a normal subgroup of G iff each left coset of N in G is a right coset of N in G.

సమూహము G లో ఉపసమూహము N అభిలంబ ఉపసమూహం కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లో N యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి ఒక కుడి సహసమితి అగుట అని నిరూపించండి.

Or

(b) Define a simple group. Prove that the G/H of all cosets of H in G wrt coset multiplication is a group.

సింపుల్ సమూహమును నిర్వచించుము. సమూహము G లో H యొక్క అన్ని సహసమితుల సమితి G/H సహసమితుల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని చూపుము.

12. (a) State and prove fundamental theorem of homomorphism of groups.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Let f be a homomorphism from a group G into a group G', then prove that f is a monomorphism iff $\ker f = \{e\}$.

సమూహము G నుండి G' కు నిర్వచింపబడిన సంగ్రస్త సమరూపత G నుండి G' కు ఒక అన్వేక సమరూపత $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$ నిరూపించుము.

13. (a) State and prove Cayley's theorem.

కెయిలీ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) (i) Prove that if G is an infinite cyclic group then G has exactly two generators.

G ఒక అనంత చక్రీయ సమూహము అయితే G కి రెండు జనక మూలకాలు మాత్రమే ఉంటాయి అని నిరూపించండి.

(ii) G is a cyclic group of order n and 'a' is a generator of G. Show that a^m is a generator of G iff $(m, n)=1$.

G అనునది n వ తరగతి చక్రీయ సమూహము మరియు 'a' ఒక జనక మూలకము అయితే G కి a^m అనునది జనక మూలకము $\Leftrightarrow$ $(m, n)=1$ అని నిరూపించండి.