C 53106

B.A./B.Sc. (Three Year) DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2017.

End Semester Examination

Fifth Semester

(Regular/Supplementary)

Paper VI : LINEAR ALGEBRA

Time : *3 Hours* *Max. Marks : 70*

PART — A

Answer any FIVE of the following questions. **(5 × 4 = 20 Marks)**

1. Prove that linear span $L(S)$ of any subset 'S' of a vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$.

   $V(F)$ సదిశాంతరాళంలోని ఏదైనా ఉపసమితి 'S' అయిన $V(F)$ నకు $L(S)$ ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

2. Show that $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ is basis for the vector space V on R.

   R పై సదిశాంతరాళము V కు $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ ఆధారమని చూపండి.

3. Describe explicitly the linear transformation $T : R^2 \to R^2$ such that $T(2,3) = (4,5)$ and $T(1,0) = (0,0)$.

   $T : R^2 \to R^2$ ప్రమేయము $T(2,3) = (4,5)$ మరియు $T(1,0) = (0,0)$ గా నిర్వచిస్తే T ఋజు పరివర్తనాన్ని నిర్దిష్టంగా వ్యక్తీకరించండి.

4. Find the characteristic equation of $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ యొక్క లాక్షనిక సమీకరణమును కనుక్కోండి.

5. State and prove Schwartz's inequality.

   స్వార్జ్స్ అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించుము.

Turn Over

6. If W is the subsapce of $V_4(R)$ generated by the vectors (1, –2, 5, –3) (2, 3, 1, –4) and (3, 8, –3, –5), find a basis of W and its dimension.

$V_4(R)$ నకు W ఉపాంతరాళము (1, –2, 5, –3) (2, 3, 1, –4) మరియు (3, 8, –3, –5) సదిశలచే W వితస్తింపబడినది. W యొక్క ఆధారాన్ని దాని పరిమానాన్ని కనుక్కోండి.

7. Let $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T: U \rightarrow V$ is a linear transformation. Than null space $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.

$U(F)$, $V(F)$ రెండు సదిశాంతారాళాలు $T: U \rightarrow V$ ఒక ఋజు పరివర్తనమయితే $U(F)$ నకు $N(T)$ ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

8. State and prove Parallelograms law.

సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

PART — B

Answer ALL the following questions. **(5 × 10 = 50 Marks)**

9. (a) Prove that a necessary and sufficient condition for a non empty subset W of $V(F)$ to be a subspace is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

$V(F)$ యొక్క ఒక శూన్యేతర ఉపసమితి W ఒక ఉపాంతరాళం కావడానికి $a, b \in F$ మరియు $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ ఆవశ్యక–పర్యాప్త నియమం అని నిరూపించండి.

Or

(b) The union of two subspaces W_1, W_2 of $V(F)$ of is a subspace if and only if one is contained in the other. $\left(W_1 \leq W_2 \,(or)\, W_2 \leq W_1\right)$

సిద్ధాంతము $V(F)$ నకు W_1, W_2 లు ఉపాంతరాళాలు అయితే వాటి చేదక సమితి కూడా ఉపాంతరాళమగును అని చూపండి. $\left(W_1 \leq W_2 \,(or)\, W_2 \leq W_1\right)$

10. (a) If $V(F)$ is finite dimensional vector space, then prove that any two bases of V have the same number of elements.

$V(F)$ ఒక పరిమిత సదిశాంతరాళం అయితే, V యొక్క ఏ రెండు ఆధార సమితులలోనైనా, ఒకే సంఖ్యలోని మూలకాలను కలిగి ఉంటామని చూపండి.

Or

(b) If m and n are dimensions of the subspace W and of the vector space V respectively, then show that $\dim(V/W) = n - m$.

m మరియు n లు వరుసగా ఉపాంతరాళం W మరియు సదిశాంతరాళం V యొక్క పరిమాణాలైతే, $\dim(V/W) = n - m$ అని చూపండి.

11. (a) State and prove that rank and nullity theorem for linear transformation of vector spaces.

సదిశాంతరాళముల యొక్క ఏక ఘాత రూపాంతరణములకు కోటి శూన్యత్వము సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

(b) Find a linear transformation $T : R^3 \to R^3$ whose range is spanned by (1, 2, 0, –4), (2, 0, –1, –3).

$T : R^3 \to R^3$ ఋజు పరివర్తన వ్యాప్తి (1, 2, 0, –4), (2, 0, –1, –3) సమితి చే వితస్తితమైతే T ప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి.

12. (a) State and prove Cayley – Hamilton theorem.

కేలీ–హేమిల్టన్ సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Find the Eigen values and Eigne vectors for the matrix $A\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

మాత్రిక A కు లాక్షణిక మూలాలు, తత్సంబంధిత లాక్షణిక సదిశలు కనుక్కోండి.

13. (a) Applying Gram – Schmidt process obtain an orthonormal basis of $R^3(R)$ from the basis $\{(2,0,1),(3,-1,5),(0,4,2)\}$.

$R^3(R)$ అంతరాళం యొక్క యీ క్రింది ఆధారాలకు గ్రామ్–స్మిడ్ లంబీకరణ పద్ధతి ద్వారా లాభాభిలంబ ఆధారం పొందండి. $\{(2,0,1),(3,-1,5),(0,4,2)\}$

Or

(b) State show that in an inner product space $V(F)$, $|<\alpha,\beta>| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ for all $\alpha, \beta \in V$.

$V(F)$, అంతర లబ్ధాంతరాళంలో ప్రతి $\alpha, \beta \in V$ లకు $|<\alpha,\beta>| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ అని చూపండి.